



Ідентифікатор подання: 61

Тип: Секційна доповідь

Числовий аналіз біфуркацій в трьох хвильовій дисипативній системі зв'язаних мод

понеділок, 26 травня 2025 р. 16:55 (20 хвилин)

Розглянуто особливості динаміки резонансної взаємодії трьох хвиль, одна з яких лінійно нестійка, а дві інші хвилі лінійно стійкі. В наближенні слабкої взаємодії хвиль система диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд має вигляд [1-8]

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \gamma_1 C_1 + M_1 C_2 C_3 e^{-i\delta t}, \\ \frac{dC_2}{dt} &= -\gamma_2 C_2 - M_2 C_1 C_3^* e^{i\delta t}, \\ \frac{dC_3}{dt} &= -\gamma_3 C_3 - M_3 C_1 C_2^* e^{i\delta t}, \end{aligned} \quad (1)$$

де t - час, i - уявна одиниця, коефіцієнти γ_k , M_k , $k = 1, 2, 3$ додатні, $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \neq 0$ - розлад частот хвиль, C_k^* - величини, комплексно спряжені до C_k . Шляхом лінійних перетворень [2-5] рівняння (1) зводяться до чотирьох автономних диференціальних рівнянь з дійсними коефіцієнтами для амплітуд хвиль a_1, a_2, a_3 та узагальненої фази $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3$ [1-3, 6]

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= a_1 + a_2 a_3 \cos \Phi, \quad \frac{da_2}{d\tau} = -\nu_2 a_2 - a_1 a_3 \cos \Phi, \\ \frac{da_3}{d\tau} &= -\nu_3 a_3 - a_1 a_2 \cos \Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \Delta + \left(\frac{a_2 a_3}{a_1} - \frac{a_1 a_3}{a_2} - \frac{a_1 a_2}{a_3} \right) \sin \Phi, \end{aligned} \quad (2)$$

де введено наступні безрозмірні змінні $\tau = \gamma_1 t, \nu_2 = \gamma_2/\gamma_1, \nu_3 = \gamma_3/\gamma_1, \Delta = \delta/\gamma_1$.

Якщо ж загасання симетричне, $\nu_2 = \nu_3$, і початкові умови для a_2 та a_3 однакові, то поклавши $a_2(t) = a_3(t)$, систему (2) можна замінити на більш просту трьох автономних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= a_1 + a_2^2 \cos \Phi, \\ \frac{da_2}{d\tau} &= -\nu_2 a_2 - a_1 a_2 \cos \Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = \Delta + \left(\frac{a_2^2}{a_1} - 2a_1 \right) \sin \Phi, \end{aligned} \quad (3)$$

з двома параметрами ν_2 та Δ .

Властивості поведінки розв'язків рівнянь (3) детально вивчалися в роботах [1-8]. Як показано в [1, 2], якщо $\Delta < \Delta_{min} = 3.73$, то в діапазоні $0 < \nu_2 < \nu_{cr}(\Delta)$ амплітуди хвиль експоненційно зростають. Функція $\nu_{cr}(\Delta)$ монотонно зростає при зменшенні Δ [4]: $\nu_{cr}(\Delta_{min}) \approx 2.2$, $\nu_{cr}(2) \approx 3$, $\nu_{cr}(1) \approx 3.7$, $\nu_{cr}(0.5) \approx 4.4$. При $\nu_2 \geq \nu_{cr}(\Delta)$ спочатку виникають граничні цикли, далі існують квазіперіодичні та хаотичні траєкторії. Біфуркаційні діаграми для максимальних значень амплітуди $a_3(t)$ у випадку симетричного загасання при різних Δ показано на рис. 1. Розрахунки біфуркаційних діаграм виконані в пакеті Mathematica 11 [9] за допомогою програми, наведеної в роботі [10].

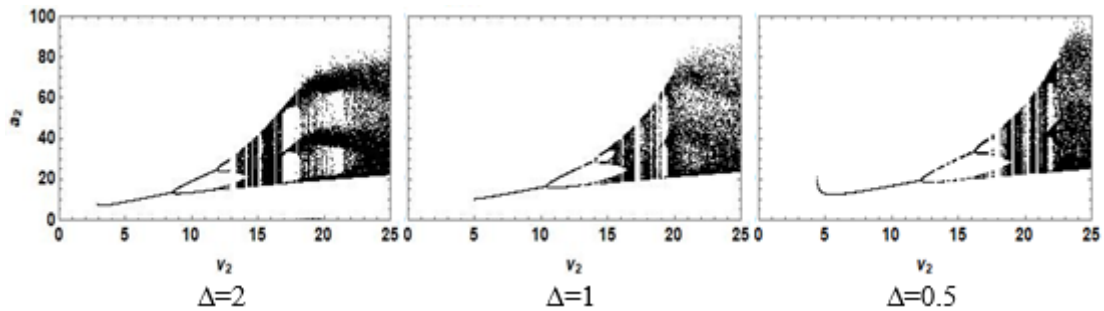


Figure 1:

Рис. 1. Біфуркаційні діаграми $\max a_3(\nu_2)$ для випадку симетричного загасання хвиль, $\nu_3 = \nu_2$, при різних значеннях розладу частот Δ .

Зовсім інший якісний характер біфуркаційних діаграм буде в випадку несиметричного загасання хвиль $\nu_3 \neq \nu_2$, якщо одне з загасань невелике. На рис. 2 наведені біфуркаційні діаграми для

максимальних значень $\max a_3(\nu_2)$ при фіксованому $\nu_3 = 3$ для різних ν_2 для тих самих значень Δ , що й на рис. 1.

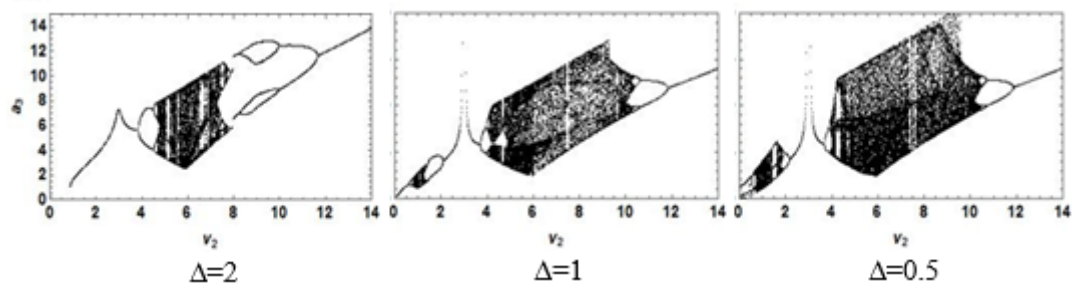


Figure 2:

Рис. 2. Біфуркаційні діаграми $\max a_3(\nu_2)$ для $\nu_3 = 3$ при різних значеннях розладу частот Δ .

З рис. 2 видно, що якщо $\Delta = 2$, то при $0 < \nu_2 < 0.895$ матимемо стійкі стаціонарні розв'язки $a_{3s} \sim \sqrt{\nu_2}$. В діапазоні $0.895 < \nu_2 < 3.84$ реалізуються граничні цикли. Квазіперіодичні та хаотичні траєкторії спостерігаються при $4.9 < \nu_2 < 7$, а при $8 < \nu_2 < 12$ виникають зворотні біфуркації граничних циклів $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Якщо $\Delta = 1$, то при $0 < \nu_2 < 0.19$ матимемо стійкі стаціонарні розв'язки $a_{3s} \sim \sqrt{\nu_2}$, а в діапазоні $0.19 < \nu_2 < 0.8$ - граничні цикли. Квазіперіодичні та хаотичні траєкторії спостерігаються при $0.8 < \nu_2 < 1.25$, а при $1.25 < \nu_2 < 2.03$ - зворотні біфуркації. При $2.03 < \nu_2 < 3$ існує граничний цикл, амплітуда якого прямує до нескінченності, якщо $\nu_2 \rightarrow 3_{-0}$. При $3_{+0} < \nu_2 < 3.7$ існує граничний цикл, амплітуда якого при збільшенні ν_2 зменшується. В діапазоні $3.7 < \nu_2 < 4.1$ мають місце біфуркації подвоєння періоду, а при $4.1 < \nu_2 < 8$ спостерігаються квазіперіодичні та хаотичні траєкторії. При $10 < \nu_2 < 14$ спостерігаються зворотні біфуркації граничних циклів.

Приблизно така сама якісна картина буде і в випадку $\Delta = 0.5$, тільки не існує стійких стаціонарних розв'язків системи (2).

Отже, при несиметричному загасанні хвиль з достатньо невеликими декрементами γ_2, γ_3 , якщо $\gamma_1 < \gamma_2 + \gamma_3$, $\max(\gamma_2, \gamma_3) < 4\gamma_1$ і $\delta \leq 2\gamma_1$, то існують розв'язки системи (2) у вигляді граничних циклів, квазіперіодичних та хаотичних траєкторій. Навпаки, в симетричному випадку $\gamma_2 = \gamma_3$ або близькому до нього, $\gamma_2 \approx \gamma_3$ і $\delta \leq 2\gamma_1$ при невеликих γ_2, γ_3 обмежених розв'язків системи (3) взагалі не існує.

1. S.Ya. Vyshkind and M.I. Rabinovich, Sov. Phys.-JETP 44 (1976) 292.
2. S.Ya. Vyshkind. Radiophysics and Quantum Electronics, 21 (1978) 600.
3. J.M. Wersinger, J. M. Finn, and E. Ott, Phys. Fluids 23 (1980) 1142.
4. M. N. Bussac, Phys. Scripta, T2/1 (1982) 110.
5. C. Meunier, M.N. Bussac, G. Laval, Physica D 4(2) (1982) 236.
6. P. Terry and W. Horton, Phys. Fluids 25(1982) 491.
7. A. C.-L. Chian, F. A. Borotto, T. Hada et al., Rev. Mod. Plasma Phys. 6 (2022) 34.
8. V. S. Marchenko, S. N. Reznik, Ya. I. Kolesnichenko, Phys. Plasmas 31 (2024) 022507.
9. <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NDSolveOverview.html>.
10. J. M. Ginoux, B. Rosetto. Chaotic Dynamical Systems Tools. Bifurcation diagrams with Mathematica <http://ginoux.univ-tln.fr/Recherche/International%20Mathematica%20Symposium.pdf>.

Author: REZNIK, Svyatoslav (Institute for Nuclear Research, Kyiv)

Доповідач: REZNIK, Svyatoslav (Institute for Nuclear Research, Kyiv)

Тип засідання: Фізика плазми та керований термоядерний синтез

Класифікація за напрямком: Фізика плазми та керованого термоядерного синтезу